

**MODEL MATEMATIKA MANGSA PEMANGSA DUA SPESIES DENGAN FUNGSI RESPON HOLLING
TIPE II DAN PERILAKU ANTI-PEMANGSA****Retno Ekawati Ningrum**Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : retnoningrum@mhs.unesa.ac.id**Abadi**Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : abadi@unesa.ac.id**Yuliani Puji Astuti**Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : yulianipuji@unesa.ac.id**Abstrak**

Interaksi antara mangsa dan pemangsa merupakan masalah penting dan menarik bagi peneliti dalam ekologi. Maka dari itu banyak peneliti membuat model matematika mangsa pemangsa untuk mengetahui perilaku dari mangsa pemangsa tersebut. Paper ini khusus membahas tentang konstruksi model matematika mangsa pemangsa dua spesies dengan fungsi respon Holling tipe II dan perilaku anti-pemangsa. Hal tersebut diperlukan untuk mengetahui perilaku dari mangsa pemangsa tersebut.

Kata kunci: mangsa pemangsa, fungsi respon, Holling tipe II, perilaku anti-pemangsa.

Abstract

Interaction between prey and predator was an important and interesting problem for researchers in ecology. Therefore many researchers made the model of prey and predator for determine the behavior of the predator and prey. This paper specifically discussed about the constructed mathematical model of two species predator prey with Holling type II response function and anti-predator behavior. It is needed to knowing behavior of predator prey.

Keywords : predator prey, response function, Holling type II, anti-predator behavior.

1. PENDAHULUAN

Banyak spesies hewan di alam, diantaranya adalah spesies burung, spesies ikan, spesies ayam, dan lain-lain. Antara spesies hewan yang satu dengan spesies hewan yang lain saling berinteraksi. Dalam proses interaksi tersebut terdapat proses makan dimakan antara spesies hewan yang satu dengan spesies hewan yang lain. Hewan yang memakan hewan lain disebut pemangsa, sedangkan hewan yang dimakan hewan lain disebut mangsa. Hubungan antara mangsa dan pemangsa sangat erat, karena jika tidak ada mangsa maka pemangsa tidak dapat hidup. Begitu juga sebaliknya, pemangsa berfungsi sebagai pengontrol populasi mangsa.

Model mangsa pemangsa yang terkenal adalah model Lotka-Volterra. Pada model Lotka-Volterra, waktu yang diperlukan mangsa untuk mencari makanan dan menangani makanannya tidak diperhatikan. Kenyataan di ekosistem, interaksi antara mangsa dan pemangsa sering rumit ketika terjadi serangan mangsa oleh pemangsa.

Sehingga secara realistis pemangsa memerlukan waktu untuk mencari dan mencerna makanannya (Mortoja, Panja, & Mondal, 2018). Oleh karena itu, model Lotka Volterra dimodifikasi dengan diberikan fungsi respon Holling yang mempertimbangkan waktu pemangsa dalam mencari dan menangani mangsanya.

Ketika terjadi predasi antara mangsa dan pemangsa, terkadang tidak ada pemenang yang jelas dari keduanya. Padahal secara umum, pemangsa pasti akan memenangkan predasi tersebut. Tetapi terkadang mangsa dapat mengalahkan pemangsanya. Perilaku ini yang disebut perilaku anti-pemangsa (Tang & Xiao, 2015).

Berdasarkan latar belakang di atas, maka penulis tertarik untuk mengkaji model mangsa pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe II dan perilaku anti pemangsa. Fungsi respon Holling yang digunakan adalah fungsi respon Holling tipe II karena pemangsa membutuhkan waktu untuk mencari dan menangani mangsanya, serta diasumsikan pemangsa tidak mencari mangsa lain saat populasi mangsa sedikit (Dawes & Souza, 2013). Tujuan

dari penelitian ini adalah untuk mengkonstruksi model mangsa pemangsa dua spesies dengan fungsi respon Holling tipe II dan perilaku anti-pemangsa. Perilaku anti-pemangsa diasumsikan tidak secara langsung menguntungkan populasi mangsa, tetapi mengurangi populasi pemangsa karena mangsa tidak memberikan makanan pada pemangsa.

2. KAJIAN TEORI

Sistem Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan yang memuat satu atau beberapa turunan dari fungsi yang tidak diketahui, yang biasa disebut $y(x)$ (atau kadang $y(t)$ jika variabel bebasnya adalah waktu t). Persamaan juga bisa memuat y itu sendiri, fungsi yang diketahui dari x (atau t), dan konstan. Contoh dari persamaan diferensial biasa adalah:

$$y' = \cos x \quad (1)$$

$$y'' + 9y = e^{-2x} \quad (2)$$

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang melibatkan turunan parsial dari fungsi yang tidak diketahui dari dua atau lebih variabel. Contoh dari persamaan diferensial parsial dengan fungsi u yang tidak diketahui dari dua variabel yaitu x dan y adalah:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang mengandung n persamaan diferensial dengan n fungsi yang tidak diketahui, n adalah bilangan bulat positif lebih besar atau sama dengan dua. Secara umum, sistem ini berbentuk:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (4)$$

dengan $x \in \mathbb{R}^n, f \in \mathbb{R}^n$ merupakan fungsi t dan x merupakan variabel terikat pada suatu selang waktu t (Kreyszig, 2011).

Model Populasi Mangsa Pemangsa Lotka-Volterra

Dinotasikan x sebagai populasi mangsa pada waktu t dan y sebagai populasi pemangsa pada waktu t . Dalam mengonstruksikan model interaksi dari dua spesies, dibuat asumsi sebagai berikut:

1. Dengan tidak adanya pemangsa, mangsa tumbuh dengan laju sebanding dengan populasi saat ini, dengan demikian $\frac{dx}{dt} = ax, a > 0$, ketika $y = 0$.
2. Dengan tidak adanya mangsa, pemangsa mati, dengan demikian $\frac{dy}{dt} = -cy, c > 0$, ketika $x = 0$.
3. Jumlah pertemuan antara mangsa dan pemangsa sebanding dengan produk populasi mereka. Setiap

pertemuan tersebut, cenderung mendorong pertumbuhan pemangsa dan menghambat pertumbuhan mangsa. Dengan demikian laju pertumbuhan pemangsa meningkat dinotasikan dengan γxy , sedangkan tingkat pertumbuhan mangsa menurun dinotasikan dengan $-\beta xy$, di mana γ dan β adalah konstanta positif.

Sebagai konsekuensi dari asumsi ini, kita diarahkan ke sistem persamaan:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + \gamma xy \end{cases} \quad (5)$$

Konstanta a, c, β , dan γ semuanya bernilai positif. a adalah laju pertumbuhan mangsa dan c adalah laju kematian pemangsa, sedangkan β dan γ adalah ukuran dari efek interaksi antara dua spesies. Persamaan (5) dikenal sebagai persamaan Lotka-Volterra. Persamaan tersebut dikembangkan dalam makalah Lotka pada tahun 1925 dan oleh Volterra pada tahun 1926 (Boyce & DiPrima, 2008).

Fungsi Respon Holling

Fungsi respon adalah banyaknya mangsa yang dimakan oleh satu pemangsa per satuan waktu sebagai fungsi kepadatan mangsa (Li & Zhu, 2013). Fungsi respon dikenalkan untuk menggambarkan perubahan tingkat konsumsi mangsa oleh pemangsa saat kepadatan mangsa bervariasi (Dawes & Souza, 2013).

Holling memperkenalkan tiga jenis fungsi respon yang disebut Holling tipe I, II, dan III. Holling tipe I menggambarkan banyaknya makanan yang dimakan pemangsa meningkat secara linier dengan kepadatan makanan. Peningkatan linier ini mengasumsikan bahwa waktu penanganan makanan dapat diabaikan, artinya waktu bagi pemangsa untuk menyiapkan dan memakan makanannya tidak mengganggu waktu untuk pencarian makanan (Dawes & Souza, 2013). Persamaan Holling tipe I adalah:

$$p(x) = mx \quad (6)$$

di mana p menunjukkan laju konsumsi dan x menunjukkan kepadatan mangsa, m menunjukkan parameter efisiensi pencarian mangsa oleh pemangsa.

Holling tipe II menggambarkan prinsip mengatur waktu dalam perilaku ekologi. Asumsinya bahwa pemangsa menghabiskan waktunya pada dua macam kegiatan yaitu mencari mangsa dan menangani mangsa yang termasuk memburu, membunuh, memakan, dan mencerna. Saat kepadatan mangsa tinggi, pemangsa membutuhkan waktu yang sangat sedikit untuk menemukan mangsa dan menghabiskan hampir seluruh waktunya untuk menangani mangsa. Pemangsa kemudian kenyang ketika laju konsumsi mangsa mencapai tingkat tertinggi (Denny, 2014). Persamaan Holling tipe II adalah:

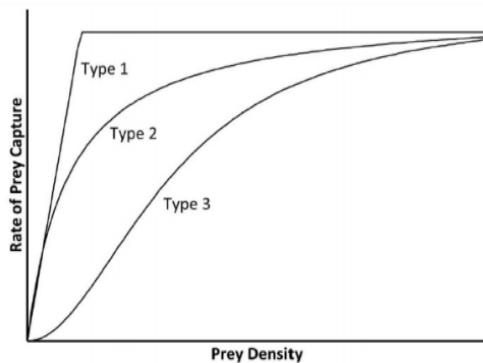
$$p(x) = \frac{mx}{1+mt_h x} \quad (7)$$

di mana t_h adalah rata-rata waktu penanganan satu mangsa oleh pemangsa.

Holling tipe III menyerupai Holling tipe II. Namun ketika kepadatan mangsa rendah, pemangsa belum mempunyai pengalaman yang cukup untuk menangkap mangsa, sehingga pemangsa membutuhkan waktu belajar (*learning time*) untuk menangkap mangsanya. Penyebab lain rendahnya laju konsumsi saat kepadatan mangsa rendah yaitu pemangsa mencari alternatif makanan lain selain spesies mangsa tersebut (Denny, 2014). Karena pemangsa cenderung akan mencari mangsa lain, maka terjadi persaingan antar mangsa sehingga menyebabkan populasi mangsa adalah pangkat dua, dinotasikan dengan x^2 . Persamaan Holling tipe III adalah:

$$p(x) = \frac{mx^2}{1+mt_h x^2} \quad (8)$$

Dengan demikian, fungsi respon Holling dapat diilustrasikan pada Gambar 1 sebagai berikut:



Gambar 1. Fungsi Respon Holling tipe I, II, dan III (Denny, 2014)

Dalam penelitian ini digunakan fungsi respon Holling tipe II yang mempertimbangkan waktu penanganan mangsa oleh pemangsa dan diasumsikan pemangsa tidak mencari mangsa lain saat kepadatan mangsa rendah (Dawes & Souza, 2013). Hal tersebut sesuai untuk memodelkan laju konsumsi mangsa oleh pemangsa yang ada di alam.

Model Pertumbuhan Logistik

Asumsi yang mengarah pada persamaan diferensial laju pertumbuhan populasi ($\frac{dx}{dt}$) adalah berbanding lurus dengan ukuran populasi. Tentu asumsi ini mengabaikan banyak keadaan pertumbuhan populasi yang terjadi sebenarnya. Sebagai contoh, fakta bahwa populasi sebenarnya tidak dapat bertambah dengan tinggi.

Untuk mempertimbangkan batasan ini, dibuat asumsi lebih lanjut tentang model populasi:

1. Jika populasi kecil, yaitu ketika $\frac{x}{N}$ mendekati 0, laju pertumbuhannya hampir berbanding lurus dengan ukuran populasi.

2. Jika populasi besar, yaitu ketika $\frac{x}{N} > 1$, maka laju pertumbuhan menjadi negatif.

Persamaan diferensial yang memenuhi asumsi itu adalah model pertumbuhan logistik. Persamaan diferensial ini adalah:

$$\dot{x} = ax \left(1 - \frac{x}{N}\right) \quad (9)$$

a dan N adalah parameter positif, di mana a adalah laju pertumbuhan populasi ketika x kecil, sedangkan N adalah daya dukung lingkungan (*carrying capacity*). Perhatikan bahwa jika x kecil, menjadi seperti persamaan diferensial dasar untuk model sederhana dari pertumbuhan populasi yaitu $\dot{x} = ax$ (karena kondisi $1 - \frac{x}{N} \approx 1$), namun jika $x > N$ maka $\dot{x} < 0$. Sehingga persamaan ini memenuhi asumsi-asumsi di atas (Hirsch, Smale, & Devaney, 2004).

Model Mangsa Pemangsa dengan Perilaku Anti-Pemangsa

Perilaku anti-pemangsa adalah perilaku mangsa sebagai bentuk pertahanan dalam melawan tekanan predasi. Perilaku anti-pemangsa merupakan respon alami dari mangsa, terjadi ketika mangsa terancam, bisa dengan mengeluarkan atau mengorbankan salah satu bagian tubuhnya. Contohnya adalah cicak dapat melepaskan ekornya saat mencoba untuk melindungi dirinya dari pemangsa. Ikan dan serangga memiliki duri untuk menghalangi pemangsa atau burung untuk makan (Savitri, 2018). Percobaan menunjukkan bahwa perilaku anti-pemangsa dari populasi mangsa ditunjukkan saat: (a) perubahan morfologi atau perubahan perilaku, atau (b) mangsa menangkap pemangsanya (Tang & Xiao, 2015).

Tang & Xiao (2015) pernah mengkaji model mangsa pemangsa dengan fungsi respon Holling Tipe IV dan perilaku anti-pemangsa dalam sistem persamaan berikut:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax \left(1 - \frac{x}{N}\right) - \frac{mx}{n+x^2} y \\ \dot{y} = -cy + \frac{\gamma mx}{n+x^2} y - \eta xy \end{cases} \quad (10)$$

dengan:

$\frac{m}{n+x^2}$ = fungsi respon Holling tipe IV

x = populasi mangsa

a = laju pertumbuhan mangsa

N = daya dukung lingkungan (*carrying capacity*)

m = parameter efisiensi pencarian mangsa oleh pemangsa

n = laju kejenuhan pemangsa dalam memangsa mangsa

c = laju kematian alami pemangsa

γ = laju konversi biomassa dari mangsa menjadi pemangsa

η = laju perilaku anti-pemangsa dari mangsa untuk pemangsa

MODEL MATEMATIKA MANGSA PEMANGSA DUA SPESIES DENGAN FUNGSI RESPON HOLLING TIPE II DAN PERILAKU ANTI-PEMANGSA

Pada model (10), perilaku anti-pemangsa diasumsikan tidak secara langsung menguntungkan populasi mangsa, tetapi mengurangi pertumbuhan populasi pemangsa karena mangsa tidak memberikan makanan pada pemangsa. Dengan demikian, perilaku anti-pemangsa dinotasikan dengan $-\eta xy$.

Model mangsa pemangsa yang akan dikonstruksi pada paper ini merupakan modifikasi dari model mangsa pemangsa yang dikaji oleh Tang & Xiao (2015).

3. PEMBAHASAN

Konstruksi Model Matematika Pada Sistem Mangsa Pemangsa Dua Spesies dengan Fungsi Respon Holling Tipe II dan Perilaku Anti-Pemangsa

Model mangsa pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe IV dan perilaku anti-pemangsa adalah sebagai berikut Tang & Xiao (2015):

$$\begin{cases} \dot{x} = ax \left(1 - \frac{x}{N}\right) - \frac{mx}{n+x^2} y \\ \dot{y} = -cy + \frac{\gamma mx}{n+x^2} y - \eta xy \end{cases} \quad (11)$$

Pada persamaan (11) dapat dilihat bahwa ketika tidak ada pemangsa, mangsa tumbuh mengikuti laju pertumbuhan logistik, sehingga dinotasikan dengan $\dot{x} = ax \left(1 - \frac{x}{N}\right)$. Kemudian ketika mangsa berinteraksi dengan pemangsa, populasi mangsa akan berkurang karena dimangsa oleh pemangsa. Pada interaksi antara mangsa dan pemangsa digunakan fungsi respon Holling tipe IV, namun pada paper ini digunakan fungsi respon Holling tipe II. Hal ini dikarenakan pemangsa memerlukan waktu untuk mencari dan menangani mangsanya. Selain itu, pemangsa juga diasumsikan tidak mencari mangsa lain dan berada pada sistem yang tertutup. Dengan menggunakan fungsi respon Holling tipe II pada persamaan (7), secara matematis perubahan kepadatan populasi mangsa pada persamaan (11) menjadi:

$$\dot{x} = ax \left(1 - \frac{x}{N}\right) - \frac{mx}{1+mt_h x} y \quad (12)$$

Sedangkan pada persamaan (12) dapat dilihat bahwa ketika tidak ada mangsa, pemangsa akan mati secara alami karena tidak memperoleh makanan, dinotasikan dengan $\dot{y} = -cy$. Kemudian ketika pemangsa berinteraksi dengan mangsa, populasi pemangsa akan bertambah karena adanya konversi biomassa dari mangsa menjadi pemangsa menggunakan fungsi respon Holling tipe IV, namun pada paper ini digunakan konversi biomassa dari mangsa menjadi pemangsa menggunakan fungsi respon Holling tipe II, dinotasikan dengan $\dot{y} = \frac{\gamma mx}{1+mt_h x} y$. Diasumsikan mangsa memiliki perilaku anti-pemangsa yang tidak secara langsung menguntungkan populasi mangsa, tetapi mengurangi pertumbuhan populasi pemangsa karena mangsa tidak memberi makanan pada pemangsa, dinotasikan dengan $\dot{y} = -\eta xy$.

Sehingga secara matematis perubahan kepadatan populasi pemangsa pada persamaan (12) menjadi:

$$\dot{y} = -cy + \frac{\gamma mx}{1+mt_h x} y - \eta xy \quad (14)$$

Dengan demikian model matematika pada sistem mangsa pemangsa dua spesies dengan fungsi respon Holling tipe II dan perilaku anti-pemangsa adalah:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax \left(1 - \frac{x}{N}\right) - \frac{mx}{1+mt_h x} y \\ \dot{y} = -cy + \frac{\gamma mx}{1+mt_h x} y - \eta xy \end{cases} \quad (15)$$

dengan

x = populasi mangsa

y = populasi pemangsa

a = laju pertumbuhan mangsa

N = daya dukung lingkungan (*carrying capacity*)

m = parameter efisiensi pencarian mangsa oleh pemangsa

t_h = rata-rata waktu penanganan mangsa oleh pemangsa

c = laju kematian alami pemangsa

γ = laju konversi biomassa dari mangsa menjadi pemangsa

η = laju perilaku anti-pemangsa dari mangsa untuk pemangsa

Sistem persamaan (15) diberikan syarat kondisi awal $x(t) > 0$, $y(t) > 0$, di mana semua parameter bernilai positif.

4. PENUTUP

Kesimpulan

Model matematika pada sistem mangsa pemangsa dua spesies dengan fungsi respon Holling tipe II dan perilaku anti-pemangsa adalah seperti pada persamaan (15).

Saran

Model tersebut dapat dianalisis dengan mencari titik kesetimbangan sistem, melakukan linierisasi pada sistem, menganalisis kestabilan titik kesetimbangan sistem berdasarkan nilai eigen, serta mempelajari perilaku sistem dengan melakukan simulasi numerik.

DAFTAR PUSTAKA

- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2008). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. (M. Shroff & P. Lashbrook, Eds.) (ninth). Grafton, New York: Laurie Rosatone.
- Dawes, J. H. P., & Souza, M. O. (2013). A Derivation of Holling's Type I, II and III Functional Responses in Predator-Prey Systems. *Journal of Theoretical Biology*, 327, 11–22. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2013.02.017>
- Denny, M. (2014). Buzz Holling and The Functional Response. *Bulletin of the Ecological Society of America*, 95(3), 200–203.

- Hirsch, M. W., Smale, S., & Devaney, R. L. (2004). *Differential Equations, Dynamical Systems & An Introduction to Chaos*. (B. Holland & T. Singer, Eds.) (Second, Vol. 60). USA: Academic Press, Elsevier.
- Kreyszig, E. (2011). *Advanced Engineering Mathematics*. (S. Corliss, B. Russiello, & M. Edward, Eds.) (tenth). USA: Laurie Rosatone.
- Li, C., & Zhu, H. (2013). Canard Cycles for Predator-Prey Systems with Holling Types of Functional Response. *Journal of Differential Equations*, 254(2), 879–910. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2012.10.003>
- Mortoja, S. G., Panja, P., & Mondal, S. K. (2018). Dynamics of A Predator-Prey Model with Stage-Structure on Both Species and Anti-Predator Behavior. *Informatics in Medicine Unlocked*, 10, 50–57. <https://doi.org/10.1016/j.imu.2017.12.004>
- Savitri, D. (2018). Dynamics Analysis of Anti-predator Model on Intermediate Predator With Ratio Dependent Functional Responses. *Journal of Physics*, 953. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/953/1/012201>
- Tang, B., & Xiao, Y. (2015). Bifurcation Analysis of A Predator-Prey Model with Anti-Predator Behaviour. *Chaos, Solitons and Fractals*, 70(1), 58–68. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2014.11.008>

